

CHE-330 Module 5 Correction

Exercice 5.0 :

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \begin{cases} 2\frac{y}{\delta} - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4 & \text{pour } 0 \leq y \leq \delta(x) \\ 1 & \text{pour } y \geq \delta(x) \end{cases}$$

Il faut déterminer l'expression de $\tau_s(x)$:

$$\tau_s(x) = -\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho v_x (v_x - v_\infty) dy$$

$$\tau_s(x) = -\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho v_\infty^2 \left[\left(2\frac{y}{\delta} - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4 \right) \left(2\frac{y}{\delta} - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4 - 1 \right) \right] dy$$

$$\tau_s(x) = -\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho v_\infty^2 \left[4\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - 4\left(\frac{y}{\delta}\right)^4 + 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^5 - 2\frac{y}{\delta} - 4\left(\frac{y}{\delta}\right)^4 + 4\left(\frac{y}{\delta}\right)^6 - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^7 + 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^5 - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^7 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^8 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^4 \right] dy$$

$$\tau_s(x) = -\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho v_\infty^2 \left[\left(\frac{y}{\delta}\right)^8 - 4\left(\frac{y}{\delta}\right)^7 + 4\left(\frac{y}{\delta}\right)^6 + 4\left(\frac{y}{\delta}\right)^5 - 9\left(\frac{y}{\delta}\right)^4 + 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + 4\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - 2\frac{y}{\delta} \right] dy$$

$$\tau_s(x) = -\frac{d}{dx} \left[\rho v_\infty^2 \delta \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{2} + \frac{4}{7} + \frac{2}{3} - \frac{9}{5} + \frac{1}{2} + \frac{4}{3} - 1 \right) \right]$$

$$\boxed{\tau_s(x) = \frac{37}{315} \rho v_\infty^2 \frac{d\delta}{dx}}$$

D'autre part :

$$\tau_s(x) = \mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{2\mu v_\infty}{\delta}$$

$$\frac{2\mu v_\infty}{\delta} = \frac{37}{315} \rho v_\infty^2 \frac{d\delta}{dx}$$

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{630}{37} * \frac{\mu}{\rho v_\infty}$$

En intégrant entre 0 et x :

$$\frac{1}{2}\delta^2(x) = \frac{630}{37} * \frac{\mu}{\rho v_\infty} x$$

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{1260}{37} * \frac{\mu}{\rho v_\infty} x} = 5.83 * \sqrt{\frac{\mu}{\rho v_\infty} x} = 5.83 * \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$$

En remplaçant dans l'expression de $\tau_s(x)$:

$$\tau_s(x) = \frac{37}{315} \rho v_\infty^2 * 5.83 * \sqrt{\frac{\mu}{\rho v_\infty} x} * \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\tau_s(x) = 0.3423 * \sqrt{\frac{\rho \mu v_\infty^3}{x}}$$

On a donc :

$$C_{T_{loc}}(x) = \frac{\tau_s(x)}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2} = 0.684 * \sqrt{\frac{\mu}{\rho v_\infty x}}$$

$$C_{T_{loc}}(x) = 0.684 * \sqrt{\frac{1}{Re_x}}$$

Exercice 5.1 :

We can calculate the terminal velocity using the force balance of the drag force F_d and the gravitational force F_g on the plate:

$$F_d - F_g = 0$$

$$\bar{c}_d \frac{1}{2} A_{eff} \rho_H v_\infty^2 - (m_p g - \rho_H V_p g) = 0$$

Here, \bar{c}_d is the average drag coefficient, $A_{eff} = 2L^2$ the effective area of the plate in contact with honey, ρ_H the density of honey, v_∞ the terminal velocity of the plate, m_p and V_p the mass and volume of the plate, and g the gravitational constant.

Assuming a laminar boundary layer, we can calculate the average drag coefficient of a rectangular plate using the Reynolds number Re_L , which depends on the viscosity of honey μ_H .

$$\bar{c}_d = 1.328 \sqrt{\frac{1}{Re_L}} = 1.328 \sqrt{\frac{\mu_H}{\rho_H v_\infty L}}$$

Plugging this into the force balance yields:

$$1.328 \sqrt{\mu_H \rho_H L^3 v_\infty^3} = g(m_p - \rho_H V_p)$$

We can solve for v_∞ :

$$v_\infty = \sqrt[3]{\frac{(g(m_p - \rho_H V_p))^2}{1.328^2 \mu_H \rho_H L^3}}$$

We can substitute the mass of the plate using the density of the plate ρ_P and the Volume of the plate $V_p = L^2 t$, where t is the thickness of the plate:

$$m_p = \rho_P L^2 t$$

Substituting V_p and m_p into the terminal velocity finally gives

$$v_\infty = \sqrt[3]{\frac{g^2 L t^2 (\rho_P - \rho_H)^2}{1.328^2 \mu_H \rho_H}}$$

to calculate the terminal velocity. The numeric application results in a terminal velocity of 0.0295 m/s, which is 29.5 mm/s.

Finally, we calculate the Reynolds number to confirm the assumption of a laminar boundary layer was valid:

$$Re_L = \frac{\rho_H v_\infty L}{\mu_H} = 0.0736$$

Since this value is much smaller than the critical value of $5 \cdot 10^5$, the assumption of a laminar boundary layer is valid.

Exercice 5.2 :

La valeur exacte de $\tau_s(x)$ a été donnée dans le cours :

$$\tau_s(x) = \frac{1.328}{4} \sqrt{\frac{\rho \mu v_\infty^3}{x}} = 0.332 \sqrt{\frac{\rho \mu v_\infty^3}{x}}$$

Pour obtenir l'expression de la force de traînée sur l'ensemble de la plaque, il faut intégrer $\tau_s(x)$ sur la surface de la plaque (deux faces) :

$$F_s = 2 * \int_0^H \int_{\frac{B}{2H}x}^{B - \frac{B}{2H}x} \tau_s(x) dz dx$$

Note : pour une valeur donnée de x comprise entre 0 et H, z est compris entre $\frac{B}{2H}x$ et $B - \frac{B}{2H}x$

$$F_s = 2 * \int_0^H \int_{\frac{B}{2H}x}^{B - \frac{B}{2H}x} 0.332 \sqrt{\frac{\rho \mu v_\infty^3}{x}} dz dx$$

$$F_s = 0.664 * \sqrt{\rho \mu v_\infty^3} \int_0^H \left(B - \frac{B}{H}x \right) * \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$F_s = 0.664 * \sqrt{\rho \mu v_\infty^3} \left[\int_0^H \frac{B}{\sqrt{x}} dx - \int_0^H \frac{B}{H} \sqrt{x} dx \right]$$

$$F_s = 0.664 * \sqrt{\rho \mu v_\infty^3} \left[2B\sqrt{H} - \frac{B}{H} * \frac{2}{3} H^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$F_s = 0.664 * \sqrt{\rho \mu v_\infty^3} \left[2B\sqrt{H} - \frac{2}{3} B\sqrt{H} \right]$$

$$\boxed{F_s = 0.885 * B \sqrt{\rho \mu v_\infty^3 H}}$$

D'autre part :

$$\begin{cases} B = 2 \sqrt{L^2 - H^2} \\ \frac{L}{B} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 2 \sqrt{L^2 - H^2} \\ L^2 = \frac{1}{4} (1 + 2\sqrt{5} + 5) B^2 \end{cases}$$

D'où :

$$B = 2 \sqrt{\frac{1}{4} (1 + 2\sqrt{5} + 5) B^2 - H^2}$$

$$B^2 = (1 + 2\sqrt{5} + 5) B^2 - 4H^2$$

$$(2\sqrt{5} + 5) B^2 = 4H^2$$

$$B = \frac{2}{\sqrt{2\sqrt{5} + 5}} H = 0.650 H$$

On a donc :

$$F_s = 0.575 * \sqrt{\rho \mu v_\infty^3 H^3}$$

Application numérique :

$$F_s = 0.575 * \sqrt{10^3 * 10^{-3} * 0.1^3 * 0.5^3} = 6.428 * 10^{-3} N$$

L'épaisseur de la couche limite est donnée par :

$$\delta(x) = 4.64 * \sqrt{\frac{\mu}{\rho v_\infty} x}$$

Au point A :

$$\delta(x_A) = 4.64 * \sqrt{\frac{\mu}{\rho v_\infty} \frac{H}{2}}$$

Application numérique :

$$\delta(x_A) = 4.64 * \sqrt{\frac{10^{-3} * 0.5}{10^3 * 0.1 * 2}} = 7.336 \text{ mm}$$

Exercice 5.3 :

a) En utilisant le facteur pré exact pour $\tau_s(x)$, la force exercée sur une plaque carrée de côté L est donnée par:

$$\begin{aligned} F_s^{1 \text{ plaque}} &= 2 * \int_0^L \int_0^L \tau_s(x) dz dx = 2 * \int_0^L \int_0^L 0.332 \sqrt{\frac{\rho \mu v_\infty^3}{x}} dz dx \\ &= 1.328 * \sqrt{\rho \mu v_\infty^3} L^3 \end{aligned}$$

b)

$$F_s = 2 * \int_0^{2L} \int_0^{2L} 0.332 \sqrt{\frac{\rho \mu v_\infty^3}{x}} dz dx$$

$$F_s = 2 * 0.332 * \sqrt{\rho \mu v_\infty^3} * 2L * 2 * \sqrt{2L}$$

$$F_s = 1.328 * \sqrt{\rho \mu v_\infty^3 L^3} * 2\sqrt{2}$$

$$F_s = 2\sqrt{2} * F_s^{1 \text{ plaque}}$$

c)

$$F_s = 2 * \int_0^{4L} \int_0^L 0.332 \sqrt{\frac{\rho \mu v_\infty^3}{x}} dz dx$$

$$F_s = 2 * 0.332 * \sqrt{\rho \mu v_\infty^3} * L * 2 * \sqrt{4L}$$

$$F_s = 1.328 * \sqrt{\rho \mu v_\infty^3 L^3} * 2$$

$$F_s = 2 * F_s^{1 \text{ plaque}}$$

Exercice 5.4

Le flux dans la couche limite reste laminaire si le nombre de Reynolds local Re_x reste inférieur à la valeur critique de $5 * 10^5$ en tout point de la couche limite. Comme Re_x augmente avec x , la longueur maximale de la plaque est donnée par la longueur à laquelle $Re_x = 5 * 10^5$.

$$Re_x \leq 5 * 10^5$$

i.e.

$$\frac{\rho v_\infty x}{\mu} \leq 5 * 10^5$$

$$x \leq 5 * 10^5 * \frac{\mu}{\rho v_\infty}$$

Donc

$$L_{\max} = 5 * 10^5 * \frac{10^{-3}}{10^3 * 5}$$

$$\underline{L_{\max} = 0.1 \text{ m}}$$

Exercice 5.5 :

Bilan de chaleur :

$$Q_1 + dQ_2 + Q_3 + Q_4 = 0$$

Les Q_i représentent les flux de chaleur à travers les surfaces \mathbb{S}_i :

$$\int_{\mathbb{S}_1} \rho c_p (\vec{v}(x, y) \cdot \vec{n}_1) T(x, y) d\mathbb{S}_1 + \int_{d\mathbb{S}_2} \rho c_p (\vec{v}(x, \delta_{th}(x)) \cdot \vec{n}_2) T_\infty d^2\mathbb{S}_2 \\ + \int_{\mathbb{S}_3} \rho c_p (\vec{v}(x + dx, y) \cdot \vec{n}_3) T(x + dx, y) d\mathbb{S}_3 - k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} B dx = 0$$

$$\int_{\mathbb{S}_1} \rho c_p v_x(x, y) T(x, y) d\mathbb{S}_1 + \int_{d\mathbb{S}_2} \rho c_p (\vec{v}(x, \delta_{th}(x)) \cdot \vec{n}_2) T_\infty d^2\mathbb{S}_2 \\ - \int_{\mathbb{S}_3} \rho c_p v_x(x + dx, y) T(x + dx, y) d\mathbb{S}_3 - k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} B dx = 0$$

On réécrit les bornes des intégrales :

$$\int_0^{\delta_{th}(x)} \rho c_p v_x(x, y) T(x, y) B dy + \int_{d\mathbb{S}_2} \rho c_p (\vec{v}(x, \delta_{th}(x)) \cdot \vec{n}_2) T_\infty d^2\mathbb{S}_2 \\ - \int_0^{\delta_{th}(x+dx)} \rho c_p v_x(x + dx, y) T(x + dx, y) B dy - k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} B dx = 0$$

Remarque : puisque le système est invariant selon z , on peut ne pas faire intervenir B . On le garde ici pour des raisons d'homogénéité...

$$\int_{d\mathbb{S}_2} \rho c_p (\vec{v}(x, \delta_{th}(x)) \cdot \vec{n}_2) T_\infty d^2\mathbb{S}_2 - \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta_{th}(x)} \rho c_p v_x(x, y) T(x, y) dy \right) B dx \\ - k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} B dx = 0$$

Il faut exprimer dQ_2 en fonction de paramètres connus du problème. Pour cela on fait un **bilan de masse** sur le volume de contrôle et multiplie par les constantes appropriées:

$$\int_{\mathbb{S}_1} \rho v_x(x, y) d\mathbb{S}_1 + \int_{d\mathbb{S}_2} \rho (\vec{v}(x, \delta_{th}(x)) \cdot \vec{n}_2) d^2\mathbb{S}_2 - \int_{\mathbb{S}_3} \rho v_x(x + dx, y) d\mathbb{S}_3 = 0 \\ \int_{\mathbb{S}_1} \rho c_p T_\infty v_x(x, y) d\mathbb{S}_1 + \int_{d\mathbb{S}_2} \rho c_p T_\infty (\vec{v}(x, \delta_{th}(x)) \cdot \vec{n}_2) d^2\mathbb{S}_2 - \int_{\mathbb{S}_3} \rho c_p T_\infty v_x(x + dx, y) d\mathbb{S}_3 \\ = 0$$

$$\int_0^{\delta_{th}(x)} \rho c_p T_\infty v_x(x, y) B dy + \int_{d\mathbb{S}_2} \rho c_p T_\infty (\vec{v}(x, \delta_{th}(x)) \cdot \vec{n}_2) d^2\mathbb{S}_2 \\ - \int_0^{\delta_{th}(x+dx)} \rho c_p T_\infty v_x(x + dx, y) B dy = 0$$

$$\int_{dS_2} \rho c_p T_\infty (\vec{v}(x, \delta_{th}(x)) \cdot \vec{n}_2) d^2S_2 - \frac{\int_0^{\delta_{th}(x+dx)} \rho c_p T_\infty v_x(x+dx, y) dy - \int_0^{\delta_{th}(x)} \rho c_p T_\infty v_x(x, y) dy}{dx} B dx = 0$$

$$\boxed{\int_{dS_2} \rho c_p T_\infty (\vec{v}(x, \delta_{th}(x)) \cdot \vec{n}_2) d^2S_2 - \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta_{th}(x)} \rho c_p T_\infty v_x(x, y) dy \right) B dx = 0}$$

On a donc :

$$dQ_2 = \int_{dS_2} \rho c_p (\vec{v}(x, \delta_{th}(x)) \cdot \vec{n}_2) T_\infty d^2S_2 = \rho c_p B \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta_{th}(x)} v_x(x, y) T_\infty dy \right) dx$$

$$\frac{dQ_2}{dx} = \rho c_p B \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta_{th}(x)} v_x(x, y) T_\infty dy \right)$$

Remarque : cf remarque précédente sur la raison de la présence de B par rapport à l'énoncé

En remplaçant dans l'équation du bilan de chaleur, on obtient:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta_{th}(x)} \rho c_p v_x(x, y) T_\infty dy \right) B dx - \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta_{th}(x)} \rho c_p v_x(x, y) T(x, y) dy \right) B dx - k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} B dx = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta_{th}(x)} \rho c_p v_x(x, y) [T_\infty - T(x, y)] dy \right) - k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

Soit :

$$\boxed{k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta_{th}(x)} \rho c_p v_x(x, y) [T_\infty - T(x, y)] dy \right)}$$

Comme lors de l'établissement du bilan de moment pour la couche limite hydrodynamique, on obtient une équation identique à celle obtenue par intégration directe des équations (5.15 dans le cours), aux bornes d'intégration près.

Exercice 5.6 :

a)

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{1260 \mu x}{37 \rho v_{\infty}}}$$

Donc à $x=15 \text{ cm}$:

$$\delta(15 \text{ cm}) = \sqrt{\frac{1260 \cdot 1.9 \times 10^{-5} \cdot 0.15}{37 \cdot 1.10 \cdot 1.5}} = \mathbf{7.67 \text{ mm}}$$

$$\delta_{th}(x) = Pr^{-\frac{1}{3}} * \delta(x)$$

Calcul de Pr :

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{1.9 \cdot 10^{-5} \cdot 1000}{0.023} = \mathbf{0.826}$$

Remarque : Dans le cours on a vu que la relation $\Delta = Pr^{-\frac{1}{3}}$ était valable pour $\Delta < 1$. Ce qui équivaut à $Pr > 1$. En réalité, on considère que cette relation est une bonne approximation pour $0.6 < Pr$ (de même que la relation de corrélation avec le nombre de Nusselt)

Donc :

$$\delta_{th}(15 \text{ cm}) = 0.828^{-\frac{1}{3}} * 7.67 = \mathbf{8.16 \text{ mm}}$$

Et à $x=30 \text{ cm}$:

$$\delta(30 \text{ cm}) = \sqrt{2} * \delta(15 \text{ cm}) = \mathbf{10.85 \text{ mm}}$$

$$\delta_{th}(30 \text{ cm}) = \sqrt{2} * \delta_{th}(15 \text{ cm}) = \mathbf{15.34 \text{ mm}}$$

b)

$$h(x) = Nu_{loc} * \frac{k}{x} = 0.332 * Pr^{\frac{1}{3}} * \sqrt{\frac{\rho v_{\infty} x}{\mu}} * \frac{k}{x}$$

Donc

$$h(15 \text{ cm}) = 0.332 * 0.826^{\frac{1}{3}} * \sqrt{\frac{1.10 \cdot 1.5 \cdot 0.15}{1.9 \cdot 10^{-5}}} * \frac{0.023}{0.15} = \mathbf{5.45 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}}$$

$$h(30 \text{ cm}) = 0.332 * 0.826^{\frac{1}{3}} * \sqrt{\frac{1.10 * 1.5 * 0.30}{1.9 * 10^{-5}}} * \frac{0.023}{0.30} = 3.85 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

Exercice 5.7

On nous donne la relation :

$$c_{naph} = 0.115e^{-0.02*y[cm]} = 0.115e^{-2*y[m]}$$

méthode 1. Sans aucune information supplémentaire, nous pouvons faire une très grande supposition : On considère que le profil de concentration est uniforme sur toute la plaque (la vitesse de l'air étant très grande devant les dimensions de la surface).

Calcul de la densité surfacique de flux de naphthalène à la surface de la plaque :

$$j_{naph,y=0} = -D_{naph} * \left. \frac{\partial c_{naph}}{\partial y} \right|_{y=0}$$

$$j_{naph,y=0} = D_{naph} * 0.115 * 2$$

$$j_{naph,y=0} = 8.4 * 10^{-6} * 0.115 * 2 = 1.93 * 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

Le flux de naphthalène à la surface de la plaque d'aire A (en tenant compte des **surfaces supérieure et inférieure**) vaut donc :

$$J_{naph,y=0} = j_{naph,y=0} * A$$

$$J_{naph,y=0} = 1.93 * 10^{-6} * (2 * 0.8 * 0.6) = 1.85 * 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{s}^{-1}$$

méthode 2. Une meilleure façon de résoudre le problème est d'utiliser les propriétés de l'air (si vous les recherchez).

Properties of Air (at p = 1 bar):

T (°C)	ρ [kg m ⁻³]	μ [kg m ⁻¹ s ⁻¹]	ν [m ² s ⁻¹]	c_p [J kg ⁻¹ K ⁻¹]	k [W m ⁻¹ K ⁻¹]	α [m ² s ⁻¹]	β [K ⁻¹]
20	1.205	1.821×10^{-5}	1.511×10^{-5}	1.006×10^3	0.0256	2.112×10^{-5}	3.411×10^{-3}
100	0.946	2.181×10^{-5}	2.306×10^{-5}	1.011×10^3	0.0313	3.271×10^{-5}	2.680×10^{-3}

Selon le cours (équation 5.26), nous avons :

$$\overline{Sh} = 0.677 Re_L^{1/2} Sc^{1/3}$$

$$Sc = \frac{v}{D} = \frac{2.3 \times 10^{-5}}{8.4 \times 10^{-6}} = 2.74 (> 0.6)$$

$Re_L = \frac{\rho v_{\infty} L}{\mu} = \frac{0.946 * 20 * 0.8}{2.2 \times 10^{-5}} = 688000$ C'est légèrement au-dessus du Re critique, cependant, puisque nous n'avons pas d'autres corrélations de nombre de Sherwood à ce stade, nous ferons simplement l'approximation que c'est ok.

$$\overline{Sh} = 786 = \frac{k_{c,L} L_c}{D_A}$$

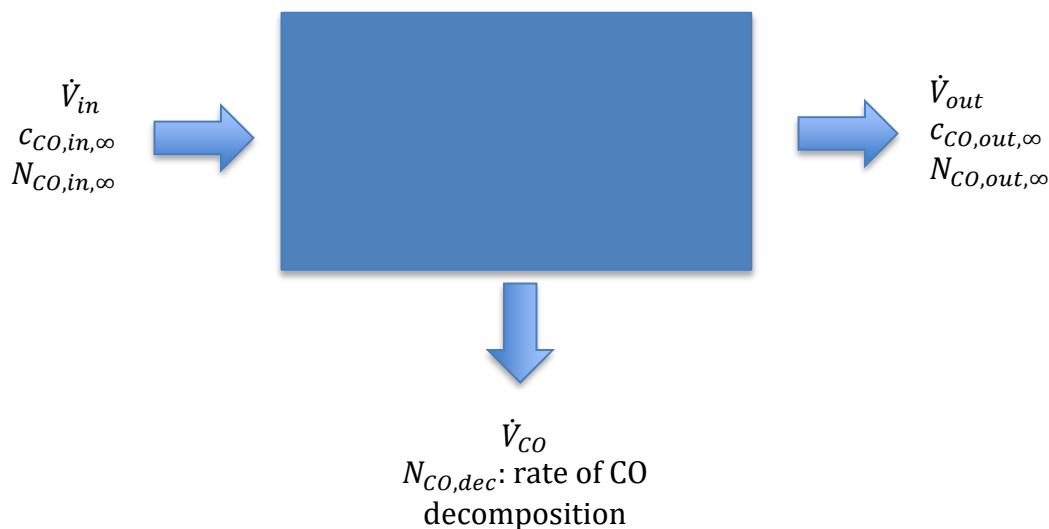
$$N_{A,y} = k_{c,L} A (c_{As} - c_{A\infty}) = \frac{\overline{Sh} D_A}{L_c} A (c_{As} - c_{A\infty})$$

$$= \frac{786 * 8.4 \times 10^{-6}}{0.8} (2 * 0.8 * 0.6) (0.115 - 0) = 9.1 * 10^{-4} \text{ mol.s}^{-1}$$

Cette réponse est très différente de la méthode 1. La méthode 1 est moins précise.

Exercice 5.8

We first consider the overall balance of the catalyst module:



Since c_{CO} is small, we consider $\dot{V}_{CO} = 0$ and thus $\dot{V}_{in} = \dot{V}_{out} = \dot{V}$.

We use the mole balance to calculate the required rate of CO decomposition for the system requirements.

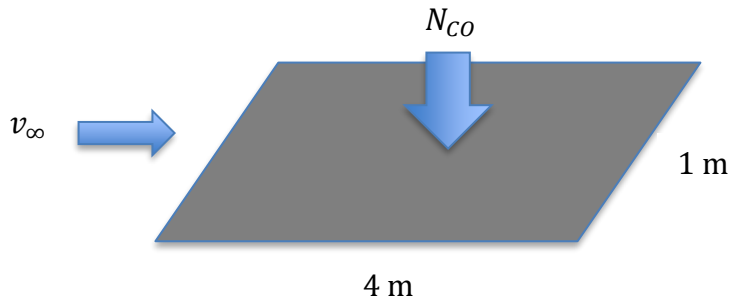
$$N_{CO,in,\infty} = N_{CO,out,\infty} + N_{CO,dec}$$

$$N_{CO,dec} = N_{CO,in,\infty} - N_{CO,out,\infty}$$

$$N_{CO,dec} = \dot{V}(c_{CO,in,\infty} - c_{CO,out,\infty})$$

$$N_{CO,dec} = 0.5 \frac{m^3}{s} \left(0.0243 \frac{mol}{m^3} - 0.01215 \frac{mol}{m^3} \right) = 0.006075 \frac{mol}{s}$$

Further, we calculate the number of required plates under the assumption that each plate would perform identically with a decomposition rate N_{CO} .



$$\overline{Sh} = 0.667 Re_L^{\frac{1}{2}} \cdot Sc^{\frac{1}{3}}$$

$$Re_L = \frac{\rho v_\infty L}{\mu} = \frac{0.946 \cdot 0.5 \cdot 4}{2.181 \cdot 10^{-5}} = 86750$$

$$Sc = \frac{\nu}{D} = \frac{2.306 \cdot 10^{-5}}{3.15 \cdot 10^{-5}} = 0.73$$

$$\overline{Sh} = 180$$

Then the decomposition rate N_{CO} for one plate becomes

$$N_{CO} = k_c \cdot A \cdot (c_{CO,\infty} - c_{CO,s})$$

where $c_{CO,s} = 0$ and $k_c = \frac{\overline{Sh} \cdot D}{L}$.

$$N_{CO} = \frac{\overline{Sh} \cdot D}{L} \cdot 2WL \cdot c_{CO,\infty}$$

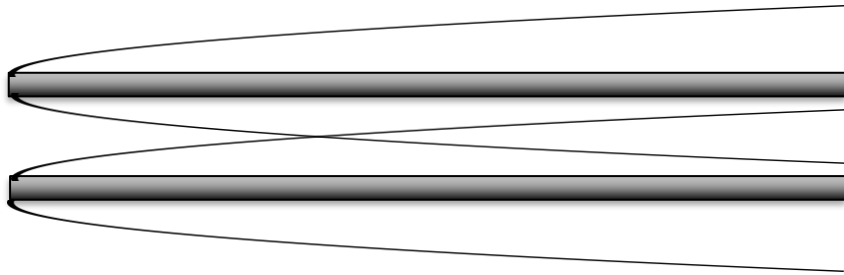
$$N_{CO} = 180 \cdot 3.15 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s} \cdot 2 \cdot 1m \cdot 0.0243 \frac{mol}{m^3} = 2.76 \cdot 10^{-4} \frac{mol}{s}$$

Then we can calculate the number of plates n from the total decomposition rate and the decomposition rate for one plate as follows:

$$n = \frac{N_{CO,dec}}{N_{CO}} = 22.01$$

Thus, we need 23 plates.

Note: This calculation assumes that the plates are far away from each other, i.e., their mass/ concentration boundary layers do not overlap. If the boundary layers would overlap, the calculated \overline{Sh} would not be accurate (see sketch).



We can calculate the relation between hydrodynamic and mass/ concentration boundary layer using:

$$\delta_c = Sc^{-1/3} \delta_v = 1.1\delta_v \text{ using } Sc = \frac{\nu}{D} = 0.73$$

Thus, we can consider approximately the hydrodynamic boundary layer since they are approximately the same. To verify our assumptions, we thus compare the spacing of the plates to the hydrodynamic boundary layer at the end of the plates (at 4 m).

For 23 plates in 1 m, the spacing is $\frac{1 \text{ m}}{(23+2)} = 40 \text{ mm}$. The addition of 2 plates is to leave adequate spacing of the top and bottom plate to the reactor walls.

In comparison, the hydrodynamic boundary layer $\delta(x)$ at 4 m is:

$$\delta(x) = 4.77 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\delta(4 \text{ m}) = 4.77 \frac{4 \text{ m}}{\sqrt{86750}} = 65 \text{ mm}$$

Hence, the hydrodynamic boundary layers are expected to overlap with the neighboring plates. This means that the estimated number of plates may not be accurate.